ערב עיון:
הידע המתמטי הדרוש למורים למתמטיקה בביה"ס היסודי וההכשרה המתאימה לפיתוחו

ד"ר ניצה כהן

המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין

החוג למתמטיקה-פיזיקה

1. כיצד, לדעתכם, אפשר ליישם את גישת דברה בול לנושא "ידע מתמטי להוראה" גם לבית הספר העל יסודי

תשובה כללית:

אכן קיים "ידע מתמטי להוראה" כפי שדברה בול הציגה, והוא רלוונטי לעל יסודי לא פחות מאשר ליסודי.

זוהי פיסת ידע של פרטים שלעתים קרובות נעלמת מעיניהם של מתמטיקאים שעוסקים במחקר מתמטי טהור ואינם נותנים את דעתם על הקנייתה לאחרים.

הידע המתמטי להוראה כולל בין השאר:

- "אנליזה של הנושא": פירוק המושג למרכיבים, לפרטים או למשמעויות שונות.
- התייחסות נפרדת ובירור של כל אחד מן המרכיבים
- התייחסות לקשר שבין המרכיבים או המשמעויות.

נעצור לרגע לצורך הדגמה:

דוגמה א: מושג הפונקציה, משמעויות ואספקטים

למשל: פונקציה כהתאמה, או כתלות בין משתנים, או כחוקיות, או כהעתקה או שינוי במובן שה"קלט" X הפך ל"פלט" Y, פונקציות שניתן לבטא כ"נוסחה", פונקציות שיש להן פן ויזואלי (למשל גרף), פונקציה כאובייקט מתמטי שניתן לעשות עליו פעולות ועוד.

מורה צריך להיות מסוגל להבחין בין האספקטים, ולבחון מה הוא מדגיש, מה התלמידים מבינים וכדומה.
אם לא יעשה זאת, הוא עלול למצוא את עצמו מדבר עם התלמידים בשפה שאיננה מובנת להם: למשל: הוא מתייחס לפונקציה כאל אובייקט, אבל הם רואים בה רק "תהליך".

דוגמה ב:

הוכחות בגיאומטריה הקשורות למשפטי החפיפה:

למשל:

מה המשמעות של מושג החפיפה,
מה המשמעות של משפטי החפיפה,
כמה מרכיבים של צלעות וזוויות יש בכל אחד ממשפטי החפיפה, למה תנאים מסוימים מספיקים ואחרים לא מספיקים,
מה המשמעות של סדר הצלעות והזוויות במשפטי החפיפה,
וכן:
מהי שרשרת טיעונים לגיטימית ומתי שרשרת טיעונים אינה כזו
מהי המשמעות של הוכחה,
על מה מותר להסתמך ועל מה לא (למשל לגבי ציורים – אילו הנחות סמויות אנחנו מניחים), וכדומה.

המשך: מה כולל ידע מתמטי להוראה:

- ❖ **התייחסות לייצוגים אפשריים למושג או הדגמות אפשריות שלו**

- ❖ **בחינה מדוקדקת של ההדגמות והייצוגים השונים:**
איזה פן מתמטי של המושג מבליט כל ייצוג ואיזה פן מתמטי הוא מעלים, מסתיר, עלול לגרום לבלבול, לשגיאה, להכללת יתר וכדומה.

  אילו ייצוגים הם מופשטים יותר ואילו ניתנים יותר להמחשה, אילו דוגמאות מוצלחות ניתן ליצור כדי "להגמיש" את דימוי המושג וכדומה.

דוגמה א: עיסוק ממושך בדימוי של הפונקציה כ"נוסחה" שמתאים לה גרף, יקשה על הבנת הפונקציה במובן היותר כללי ומופשט שלה.

דוגמה ב: הבאת דוגמאות מגוונות למושג האלכסון במצולע שמכניסות לדימוי המושג גם "מקרים מיוחדים"

❖**יכולת לצפות קשיים** שעלולים להתעורר בהבנת המושג. הבחנה אילו מרכיבים של המושג קשים יותר להבנה, אילו קונפליקטים יכולים לעלות, אילו דימויי מושג חלקיים או שגויים עלולים להיווצר וכדומה.

דוגמה א: מה בדיוק המשמעות של שיפוע ומה המשמעות של "שיפוע בנקודה", מה המשמעות של משיק לפונקציה ואיך ייתכן שהוא יכול לחתוך את הפונקציה, האם "חוק ההעתקה" חייב להתבטא בנוסחה?

דוגמה ב: הגדרת המושג "פונקציה קמורה" איננה עולה בקנה אחד עם הגדרת "קבוצה קמורה" בגיאומטריה.

דוגמה ג: יחסי ההכלה בין הסוגים השונים של המרובעים (ומודעות לכך שהפנייה להגדרה לא בהכרח עוזרת)

❖ אילו אינטואיציות כדאי לפתח ולטפח אצל הלומד לגבי המושג
מתי ועד כמה להדגיש את הפן האינטואיטיבי ומתי ועד כמה לדבוק בפן הפורמלי

דוגמה: "ישר מאונך למישור"

דרך אפשרית אחת – ללמד את ההגדרה ולפעול לפיה.
בעיות: במקרים רבים תלמידים פועלים באופן אינטואיטיבי שגוי ללא כל התייחסות להגדרה, או שהם לומדים לפעול על פי ההגדרה באופן מכני, אבל לא מבינים את הרעיון שיש בה.
שתי ההתנהגויות האלה לא רצויות בעיני.

דרך אפשרית שנייה – להיות מודע מראש לקושי האינטואיטיבי (הבלבול שיש לתלמידים בין הסוגים השונים של מאונכות). מתוך כך - לנסות להעלות את הקושי על פני השטח במטרה לבנות אינטואיציה שתסלול את הדרך להגדרה ותגרום לתלמיד לפתור בעצמו את הקונפליקט ואפילו להגיע בעצמו לרעיון שבהגדרה.

❖ היכולת לנתח הסברים, טענות או טעויות של תלמידים

דוגמה א:

מעקב אחר הוכחה של תלמיד בגיאומטריה
מעקב כזה דורש הרבה מתמטיקה, שהיא אחרת מאשר לדעת בעצמך להוכיח את זה בדרך שאתה רגיל אליה.

דוגמה ב:

תלמידה טענה שהקביעה: "כל מרובע קעור הוא דלתון" לא נכונה. הנימוק שלה: "יש גם דלתון קמור".

דוגמה ג:

יכולת לנתח ולשפוט אלגוריתם שתלמיד "הביא מהבית" ושונה מזה שנלמד בכיתה.

❖ היכולת לייצר דוגמאות ודוגמאות נגדיות

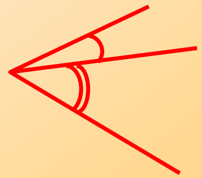
דוגמה: ביקורת הגדרות של תלמידים

המשימה: הסטודנטים מתבקשים להגדיר מושגים שונים.
ההגדרות נאספות וניתנות להם לביקורת (לפעמים בתוספת הגדרות משנים קודמות).

הגדרות שניתנו למושג "זוויות צמודות"

a. זוויות אשר יש להן קדקוד משותף וקרן אחת משותפת.
b. שתי זוויות בעלות קדקוד משותף שסכומן שווה לזווית שטוחה
c. זוויות הנמצאות על ישר אחד ומשלימות זו את זו ל-180°

דוגמאות נגדיות:

a


b


c


- ❖ אילו מרכיבים מתמטיים של המושג יש מקום להבליט ועל אילו אפשר לוותר בהוראה.

- ❖ אילו רעיונות מתמטיים כלליים ניתן לפתח דרך ההוראה של המושג הספציפי שמלמדים.
(למשל: רעיונות לוגיים, הרגלים של עשייה מתמטית כמו השערת השערות ובדיקתן, תקפות של נימוקים והוכחות, חשיבה ביקורתית וכדומה.)

2. האם וכיצד ניתן לחזק את מרכיב הידע הזה בשלבים השונים של הפיתוח המקצועי?

תשובה כללית:

בוודאי שחשוב לחזק מרכיב זה של הידע.

יש לעשות זאת במהלך ההכשרה של המורים, במקביל להקניית הידע התוכני "הטהור"

יש ללמד במקביל

ידע מתמטי
"טהור"
ברמה של פחות או
יותר תואר ראשון

ידע מתמטי
להוראה

- הרחבת הידע והעמקתו צריכה להיעשות תוך התייחסות לאספקטים שונים בתוכו, כולל אספקטים יחודיים למורים.
- המתכונת של "קודם תואר במתמטיקה," ואחר כך תעודת הוראה שכוללת לימודי פדגוגיה היא שגויה בעיני

הסכנה: לא ייווצר קישור בין הנלמד בשני התחומים.

:Perkins (2004)

הבנה של נושא כוללת את יכולת ביצוע במגוון אספקטים הקשורים לנושא, למשל:

- יכולת להסביר את הנושא,
- שליטה בהוכחות המתקשרות אליו,
- יכולת למצוא דוגמאות,
- היכולת להכליל וליישם,
- לראות אנלוגיות,
- ליצג אותו בדרך חדשה ועוד
- Perkins קורא לביצועים כאלה: "ביצועים של הבנה" performances of understanding

כאשר עושים זאת במקביל
גם נושאים שלא קשורים ישירות להוראה בעתיד נלמדים באופן אחר.

המורה הלומד יפתח:

- **מודעות לאופן הלמידה של עצמו ושל חבריו,**
- **הרגל "לפרק" את הנלמד,**
- **ניסיון לברר את הקשיים שלו או של חבריו,**
- **בחינת "מקרי קצה",**
- **חיפוש דרכי הסבר או עקיפה שיעזרו לו או לחבריו,**
- **מודעות להבדלים בין מה שהוא הבין לבין מה שחבריו הבינו**

וכדומה.

סימוכין לכך שלא נכון להפריד:

- ידע תיאורטי שמוקנה למורים עלול להתגלות כידע "עקר". התהליך של ההבנה לא בהכרח מתחולל במידה שתאפשר שימוש לצורך הוראה.

(Messner and Reusser (2000) אצל ,Roesken)

- משה זילברשטיין הצביע על חוסר האינטגרציה בין הלימודים הפדגוגיים לבין הלימודים הדיסציפלינאריים כעל "רעה חולה". הוא טען שהציפייה שהסטודנט יעשה לבד את האינטגרציה הזו איננה מעשית ובדרך כלל לא מתממשת.

(בהרצאה מפיו)

- פרחי הוראה לא מצליחים לזהות קשיים של תלמידים. קשה מאד להקנות יסודות של התמודדות זו רק בשלבי ההתנסות בהוראה של פרחי ההוראה והמורים המתחילים, ולכן יש להקנות אותה עוד בשלב הפורמאלי של ההכשרה להוראה במכללות ובאוניברסיטאות.

(Sophia Penso, 2002)

- לעתים קרובות סטודנטים להוראה או מורים בהשתלמויות מורים לומדים תיאוריות למידה שונות, אבל אופן הלימוד הן של התוכן המתמטי וגם של התיאוריות עצמן איננו משקף כלל את התיאוריות הללו. הם אינם מצליחים לקשר בין תיאוריות ההוראה לבין התכנים. כאשר ילמדו – הם לעתים קרובות יעשו זאת כמו שהם למדו, ולא יעלה בדעתם לעשות זאת אחרת.

(Magdalene Lampert 1990)

2. התייחסו לכל אחת מהגישות המוצגות למטה (ואשר מעובדות בהמשך לגישות שהוצגו בפאנל בכנס בשפיים): עם מה אתם מסכימים, ולמה אתם מתנגדים?

תשובה כללית:

בכל אחת מהגישות המוצגות יש בעיני "אלמנט רלוונטי"

ויחד עם זה

אף אחת מהן לא יכולה לייצג

את הידע הבלעדי הנחוץ למורים.

בעיני צריך "גם וגם וגם"

(פירוט בעל פה)

2. הציגו בקצרה: איזה ידע מתמטי צריכה, לדעתכם, לכלול תכנית הכשרה למורי מתמטיקה בבית הספר העל-יסודי? כיצד תוכלו לשכנע את מקבלי ההחלטות בצדקת דבריכם?

תשובה כללית:

"גם וגם וגם" ובמקביל!

סוגים של קורסים שצריכים להיכלל בתכנית ההכשרה:

קורסים של "מתמטיקה גבוהה" וידע מתקדם
(פחות או יותר ברמה של תואר ראשון במתמטיקה)

קורסים משולבים (CCK ו-SCK)
המטפחים ידע עמוק בנושאים הבסיסיים.
קורס כזה צריך לכלול גם הרחבת הידע המתמטי הטהור הקשור לנושאים הבסיסיים וגם העמקת הידע להוראה.

קורסים בדגש של "מתמטיקה להוראה"
המתמקדים בנושא ספציפי, מעמיקים בכל האספקטים שנכללים
ב"ידע מתמטי להוראה" ו"ידע פדגוגי תוכני"
(KCT-ו KCS ,SCK)

וכן:
קורסים שפותחים את הדלת לחשיבה מתמטית, לתרבות
מתמטית, לטיפוח תחושה של "מהי מתמטיקה"
בלי שיהיו קשורים ישירות ל"מה אלמד מחר"
ולאו דווקא בקונטקסט "גבוה" או "קשה"
(למשל: תורת הקבוצות, לוגיקה לאו דווקא במבט הפורמליסטי
שלה, פרקים בהסטוריה של המתמטיקה ועוד)

לי שולמן (2004):

אנו מצפים מן המורה שיבין את תוכן המקצוע שלו לפחות ברמה של עמיתו שאינו מורה – שרק מחזיק בְּתואר אקדמי בתחום. המורה אינו יכול להסתפק בהבנת עצם העובדה שדבר מסוים הוא כך ולא אחרת; עליו להבין גם מדוע הדבר הוא כך, מה הבסיס שעליו מושתתת הצדקתו ובאילו נסיבות יהיה אפשר להחליש או אפילו לפסול את אמונתנו בהצדקתו.

לקטוס (1976) ופויה (1954):

מי שיחשב יודע מתמטיקה צריך להיות מסוגל לצעוד צעד אחורנית מהידע האישי שלו, להעריך את ההנחות שלו, להצדיק את הבסיס והלגיטימציה שלהן, ולעקוב אחרי דעות אחרות.

- **Liping Ma** (1999) משווה את הידע של המורים בסין לזה של המורים בארצות הברית. למורים הסיניים יש לדעתה סוג אחר של ידע מתמטי: **ידע עמוק יותר בנושאים הבסיסיים** (לעומת יותר שנות לימוד בארה"ב)

לי שולמן בהקדמה לספר שלה טוען:

- המכללות להוראה והאוניברסיטאות הן המקומות שבהם המורים אמורים לרכוש את הידע העמוק בנושאים הבסיסיים.
- צריך לפתח קורסים הרבה יותר אפקטיביים למתכשרים להוראה.
- יש להכיר בידע זה כידע מדויק וראוי להילמד ברמה אוניברסיטאית.
- על האוניברסיטאות והמכללות לקחת אחריות על ידע כזה למורים עתידיים.

הערות וסיכומים:

ידע מתמטי להוראה כולל את היכולת לייצג ולנסח את התכנים המתמטיים באופן שיהפוך אותם למובנים לאחרים.

אני מתנגדת להפרדה
בין הידע המתמטי "הטהור" לבין הידע המתמטי להוראה

ידע מתמטי להוראה הוא הכרחי והוא צריך להילמד
בצורה מסודרת ואינטנסיבית, בצד הידע המתמטי ה"תכני".
אסור להניח שאת "אמנות ההוראה" אפשר להשלים לבד
מתוך הניסיון בשטח

מי שסיים תואר במתמטיקה לא בהכרח מסוגל ללמד אותה.
לפעמים, "ממרום ידיעותיו" הוא לא מודע לפרטים
המרכיבים את הנושא, לאספקטים השונים שלו, שאולי חלק
מהם נעלם מעיני התלמיד שלו וכדומה.

היודעים היטב מתמטיקה ולא מתמצאים במתמטיקה של
ההוראה עלולים לעתים לגרום "נזקים":
הם לא מצליחים להבין מה הילד לא מבין, ופונים לדרכים של
שינון, שבמקרים רבים עוזרים לתלמיד לשרוד, אבל רק
מרחיקים אותו מהמתמטיקה.

צריך לאפשר למכללות (גם אלה שאינן "שלוחה של") ליצור תכניות של BSc במתמטיקה והוראתה.

צריך לבטל את הקיצוץ המסיבי של שעות לימוד במתמטיקה.
הכשרה טובה, שתכלול את כל המרכיבים, דורשת זמן!

יש לראות בבעיית החינוך בעיה לאומית
ולהציבה בסדר עדיפויות גבוה.
כדי למשוך מועמדים טובים להוראה
צריך לנקוט צעדים מעשיים!
(משכורות מורים, כיתות קטנות יותר, מעמד המורה וכדומה)

תודה רבה!

ד"ר ניצה כהן

המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין

החוג למתמטיקה-פיזיקה